Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Покривање правоугаоника целобројних ивица минималним бројем квадрата

Студент

Драгана Маринковић

Ментор

Проф. др Миодраг Живковић

Београд, 2018. године

Универзитет у Београду

Математички факултет

Мастер рад

Аутор: Драгана Маринковић 1116/2016

Наслов: Покривање правоугаоника целобројних ивица минималним бројем квадрата

Ментор: Проф. др Миодраг Живковић
Математички факултет, Универзитет у Београду

Чланови комисије: Проф. др Филип Марић
Математички факултет, Универзитет у Београду
др Стефан Мишковић
Математички факултет, Универзитет у Београду

Датум одбране ____________________________

РЕЗИМЕ

У овом раду се разматра дводимензиони проблем у коме се захтева разлагање датог правоугаоника на најмањи број квадрата. Резултујући квадрати морају имати целобројне ивице паралелне ивицама правоугаоника, спаковани тако да без преклапања прекривају цео дати правоугаоник. У раду [1] показано је да прекривање квадратима правоугаоника димензија $p \times q$, где су p и q узајамно прости цели бројеви, $q > p$, има бар $max\left\{\frac{q}{p}, log_2 p\right\}$ квадрата. Показано је да се може конструисати прекривање са мање од $\frac{q}{p} + C \cdot log_2 p$ квадрата, за неку константу C. Конструктивни доказ тог тврђења је алгоритам који је у овом раду програмски реализован и упоређен по тачности решења, броју квадрата за дато p и q, са похлепним алгоритмом заснованим на Еуклидовом алгоритму и са до сада познатим оптималним решењима.

КЉУЧНЕ РЕЧИ: дводимензионо прекривање, минимално прекривање, прекривање правоугаоника, прекривање квадратима.

Садржај

1. Увод

У овом раду се разматра дводимензиони проблем у коме се захтева разлагање датог правоугаоника на најмањи број квадрата. Резултујући квадрати морају имати целобројне ивице паралелне ивицама правоугаоника, спаковани тако да без преклапања прекривају цео дати правоугаоник. У неким радовима, [7], [8], разматра се и проблем у коме сви прекривајући квадрати морају бити различити међу собом. Такав правоугаоник, који можемо покрити без преклапања квадратима који су сви различитих димензија, називамо савршеним. Савршени правоугаоници нису предмет овог рада.

Макс Ден (Max Dehn) је у раду [2] 1903. године показао да правоугаоник који се прекрива коначним бројем квадрата мора имати рационалан однос ивица. Наравно, важи и обрнуто. Овде се бавимо квантитативним аспектом: колико је квадрата неопходно да се прекрије правоугаоник димензија $p \times q$, где су p и q цели бројеви? У раду претпостављамо, без нарушавања општости, да су p и q позитивни цели бројеви. Већи од бројева $\frac{q}{p}$ и $\frac{p}{q}$ називамо ***размером*** правоугаоника димензија $p \times q$. У случају да је размера правоугаоника ирационалан број већи од 1, по Деновим резултатима прекривање правоугаоника коначним бројем квадрата целобројних ивица није могуће.

Како случајеви када је $p = 1$, $q = 1$ и $p = q$ доводе до тривијалних решења, број потребних квадрата је респективно q, p и 1. Даље претпостављамо да је $1 < p < q$, (тј. ротирамо за 90° правоугаоник уколико је то неопходно).

У раду [1] доказана је теорема која даје доњу и горњу границу за број квадрата потребних да се прекрије дати правоугаоник.

Теорема 1. *Прекривање правоугаоника димензија* $\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{q}$, *где су* $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ *узајамно прости цели бројеви,* $\boldsymbol{p} < \boldsymbol{q}$, *захтева најмање* $\boldsymbol{max}\left\{\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p}}, \boldsymbol{log_2 p}\right\}$ *квадрата. Штавише, постоји прекривање са мање од* $\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{C_1 log_2 p}$ *квадрата целобројних ивица, за неку универзалну константу* $\boldsymbol{C_1}$.

Величина $\frac{q}{p}$ у овим двема границама неопходна је за танке правоугаонике, на пример правоугаоник димензија $n \times 1$ захтева најмање n квадрата. Ако је $\frac{q}{p}$ ограничена величина, теорема нам даје логаритамску горњу и доњу границу.

У овом раду се разматра неколико алгоритама за практично покривање правоугаоника квадратима заснованих на деловима доказа теореме 1 у раду [1].

2. Горња граница за рационалне правоугаонике

Нека је R правоугаоник димензија $p \times q$, где су $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ узајанмо прости цели бројеви, $0 < p \leq q$. Претпоставимо да је $\frac{q}{p} < 2$, у противном, ако је $\frac{q}{p} \geq 2$, правоуга-оник се може делимично прекрити са $n = \left\lfloor \frac{q}{p} \right\rfloor - 1$ [1]квадрата димензија $p \times p$, тако да преостали правоугаоник димензија $p \times (q - np)$ задовољава горе наведени услов. У овом одељку излаже се доказ горње границе из Теореме 1.

Приказ броја $\alpha \in R$ у облику

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}$$

где $a_0 \in Z, a_1, a_2, \ldots \in N$ зове се развој броја α у верижни разломак. Верижни разломак краће записујемо у облику $[a_0;\ a_1, a_2, \ldots]$. Бројеви $a_0, a_1, a_2, \ldots$ зову се парцијални коефицијенти, а дефинишу се на следећи начин:

$$a_0 = \lfloor \alpha \rfloor, \qquad \alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}, \qquad a_1 = \lfloor \alpha_1 \rfloor, \qquad \alpha_1 = a_1 + \frac{1}{\alpha_2}\ , \qquad a_2 = \lfloor \alpha_2 \rfloor, \cdots$$

Поступак се наставља све док је $a_k \neq \alpha_k$. Развој у верижни разломак броја α је коначан ако и само ако је α рационалан број.

За ирационалан број $x = [a_0;\ a_1, a_2, \ldots,\ a_k \ldots]$, такав да су сви парцијални коефицијенти a_i ограничени са n, кажемо да је *n-ограничен* број. Следећу теорему наводимо без доказа.

Теорема 2.(Хол [3]) *Сваки рационалан број између* $\mathbf{\sqrt{2} - 1}$ *и* $\mathbf{4 + 4\sqrt{2}}$ *може се написати као сума два 4-ограничена броја.*

Претходна теорема нам омогућава једно прекривање правоугаоника димензија $x \times 1$, где је x рационалан број. Бројеви $\sqrt{2} - 1 = 2 \cdot [0; 4,1,4,1, \cdots]$ и $4 + 4\sqrt{2} = 2 \cdot [4; 1,4,1, \cdots]$ представљају доњу и горњу границу потребног броја квадрата. Да прекријемо правоугаоник димензија $x \times 1$, где је $1 < x \leq 4 + 4\sqrt{2}$, представимо број x

[1] $\lfloor x \rfloor$ је највећи цео број не већи од x

у облику збира $x = x_1 + x_2$, где су x_1, x_2 два *4-ограничена* броја. Вертикалном линијом поделимо правоугаоник димензија $x \times 1$ на правоугаоник димензија $x_1 \times 1$ и правоугаоник димензија $x_2 \times 1$. Ако применимо похлепни алгоритам, видети поглавље 3, на сваки од добијених правоугаоника, како су x_1, x_2 два *4-ограничена* броја, у сваком од ових правоугаоника сваки додати квадрат заузима најмање $\frac{1}{5}$ површине тог правоугаоника, стога након додавања $2n$ квадрата непокривени део износи највише $\left(\frac{4}{5}\right)^n$ почетне површине. Варијација овог метода биће прекривање правоугаоника целобројних ивица.

Из теореме 2. следи да постоје *4-ограничени* рационални бројеви x_1 и x_2, такви да је $x_1 + x_2 = \frac{q}{p}$. Нека је $k_1 = \lfloor x_1 p \rfloor$ и $k_2 = q - k_1$. Тада је $\left|\frac{k_i}{p} - x_i\right| < \frac{1}{p}$ и $\frac{k_1}{p} + \frac{k_2}{p} = \frac{q}{p}$.

Поделимо правоугаоник R на правоугаоник R_1, димензија $p \times k_1$, и правоугаоник R_2, димензија $p \times k_2$. Показаћемо да можемо извесно време успешно примењивати похлепни алгоритам, на сваки од ових правоугаоника, тј. све док сваки од преосталих непокривених правоугаоника R_1', R_2' има странице дужине $\leq c\sqrt{p}$ за неку константу c (а R_1', R_2' имају размеру ≤ 2).

Затим понављамо поступак, користећи теорему 2. да поделимо R_1', R_2' сваки на два, примењујући похлепни алгоритам докле год преостали правоугаоници немају ивице $\leq c\sqrt{c\ p^{1/2}} \leq c^2\, p^{1/4}$. Уопште, после k примена теореме, преостали правоугаоници имају ивице краће од $c^k p^{\frac{1}{2^k}}$

Дужине страница смањују се најмање са x на $c\sqrt{x}$ пре дељења, а свака подела дуплира број правоугаоника. Када је дужина страница новодобијеног правоугаоника мања од константе $2c^2$, новодобијени правоугаоник произвољно поделимо.

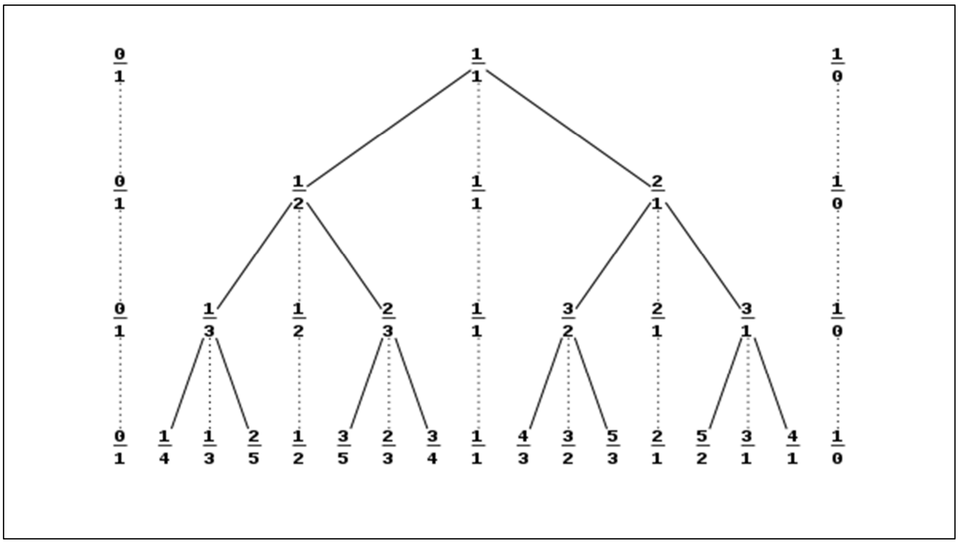
Укупан број квадрата потребан за прекривање $N \leq 2log_\alpha p + 4log_\alpha\left(cp^{1/2}\right) + 8log_\alpha\left(c^{3/2}p^{1/4}\right) + \cdots + 2^k log_\alpha\left(c^{2-2^{-k+1}}p^{2^{-k}}\right) + 2^{k+1}c'$, где је k изабран тако да је $p^{2^{-k}} \approx 2$, односно, $k \approx log_2 log_2 p$, а c' је број квадрата потребан за прекривање правоугаоника целобројних ивица чија је дужина ограничена са $2c^2$. Стога је број квадрата ограничен одозго са

$$N \leq 2klog_\alpha(c^2 p) + 2^{k+1}c' \leq 2\, log_\alpha(c^2 p)log_2 log_2 p + 2\, c' log_2 p.$$

Остаје да докажемо тврдњу да можемо прекрити правоугаоник димензија $p \times k_1$ помоћу похлепног алгоритма све док преостали правоугаоник нема ивице $\leq c\sqrt{p}$.

Пар несводљивих разломака $0 \leq \frac{a}{b} < \frac{c}{d} \leq 1$ назива се Фарејев пар разломака ако је $bc - ad = 1.$ Медијанта ова два разломка по дефиницији је разломак $\frac{a+c}{b+d}$. На пример, $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ је један Фарејев пар разломака са медијантом $\frac{5}{7}$.

Ако су $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ Фарејев пар разломака, интервал $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$ називамо Фарејевим интервалом. Ако је $\left[\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right]$ Фарејев интервал са медијантом $\frac{a+c}{b+d}$, тада су подинтервали $\left[\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}\right]$ и $\left[\frac{a+c}{b+d}, \frac{c}{d}\right]$ такође Фарејеви интервали.



Слика 1. Фарејево стабло

Фарејев интервал I је подинтервал интервала $(0, \infty)$ са рационалним границама $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ које задовољавају једначину $p_2 q_1 - p_1 q_2 = 1$ (у овом контексту се због униформности узима да је $\frac{p_1}{q_1} = 0 = \text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}$ и $\frac{p_2}{q_2} = \infty = \text{"}\frac{1}{0}\text{"}$). Сваки Фарејев интервал I уметањем разломка $\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}$ може се разложити на два Фарејева подинтервала $L(I) = \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}\right)$ и $R(I) = \left(\frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}, \frac{p_2}{q_2}\right)$. Скуп Фарејевих интервала на овај начин формира бинарно стабло чији је корен $I_0 = (0, \infty) = \left(\frac{0}{1}, \frac{1}{0}\right)$. Фарејеви интервали имају ознаку која указује на јединствену опадајућу путању од корена до I; ова ознака је коначна реч од слова "L" и "R". Тако на пример $LRL(I_0) = LR\left(\left(\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)\right) = L\left(\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$. Фарејев интервал $I = R^{a_0} L^{a_1} R^{a_2} L^{a_3} \dots R^{a_{2k}}(I_0)$ има својство да за $x \in I,$ верижни разломак за x

почиње са $x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{2k}, \dots]$, а сличну особину имају и интервали за речи које се завршавају са $L^{a_{2k+1}}$. За Фарејев интервал кажемо да је коначан ако је $q_2 > 0$.

Лема 3. *Ако је* $\boldsymbol{I = \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)}$ *коначан Фарејев интервал који садржи 4-ограничен број, тада је* $\boldsymbol{\frac{1}{5} \leq \frac{q_1}{q_2} \leq 5}$.

Доказ. Ако је $\boldsymbol{x \in I}$ *4-ограничен* број, реч $\boldsymbol{w}$ таква да је $\boldsymbol{I = w(I_0)}$ нема више од четири узастопних $\boldsymbol{L}$-ова и $\boldsymbol{R}$-ова. Детаљније, $\boldsymbol{\frac{1}{5} < x < 5}$, те је $\boldsymbol{x}$ у једном од интервала $\boldsymbol{\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{1}, \frac{2}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{3}{1}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{4}{1}\right), \left(\frac{4}{1}, \frac{5}{1}\right)}$, за које је резултат тачан.

Сада ако је $I = L(J)$, тада је $q_1 \leq q_2$, те сваки од $R(I)$, $R^2(I)$, $R^3(I)$, $R^4(I)$ има дато својство. Ако је $I = R(J)$ тада је $q_1 \geq q_2$ и свако од $L(I)$, $L^2(I)$, $L^3(I)$, $L^4(I)$ има тражено својство, те доказ непосредно следи. □

Одредимо дужину од I: ако је $I = \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ тада $|I| = \frac{1}{q_1 q_2}$.

Последица 4. *Ако је* $\boldsymbol{I}$ *коначан Фарејев интервал који садржи 4-ограничен број, тада је* $\boldsymbol{\frac{1}{5} \leq \frac{|L(I)|}{|R(I)|} \leq 5}$.

Доказ. Ако је $I = \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ тада $\frac{|L(I)|}{|R(I)|} = \frac{\left|\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}\right|}{\left|\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1+p_2}{q_1+q_2}\right|} = \frac{q_2}{q_1}$ □

Лема 5. *Ако је x 4- ограничен број и* $\left|\frac{k}{p} - x\right| < \frac{1}{p}$ *тада постоји Фарејев интервал* $\left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$ *који садржи оба и x и $\frac{k}{p}$ са $q_1 > c_2\sqrt{p}$ за неку универзалну константу c_2* .

Доказ. Из Последице 4 следи да се дужина Фарејевих интервала угњеждених надоле ка x геометријски смањује (у распону од $\frac{6}{5}$ до 6). Стога постоји Фарејев интервал I који садржи x дужине $\frac{5}{p} \leq |I| \leq \frac{30}{p}$. Враћањем за највише 5 корака ка корену постоји Фарејев интервал J, $I \subset J$ такав да је растојање од I до крајњих тачака од J најмање $\frac{1}{p}$ (јер међу последњих 5 слова речи w постоји бар једно L и једно R). Стога J садржи оба и x и $\frac{k}{p}$. Штавише, из последице 4 следи и да је $\frac{5}{p} \leq |I| \leq |J| \leq \frac{30}{p} \cdot 6^5$. Те ако је $J = \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$, имамо да је $\frac{1}{q_1^2} \leq \frac{5}{q_1 q_2} = 5|J| \leq \frac{5^2 6^6}{p}$, па кореновањем добијамо $q_1 \geq \frac{\sqrt{p}}{5 \cdot 6^3}$ и слично за q_2. □

Ако је l дужина речи $J = \left(\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}\right)$, после додавања l квадрата правоугаонику димензија $k \times p$ похлепним алгоритмом, преостаје правоугаоник димензија $a \times b$, где је $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & p_1 \\ q_2 & q_1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix}$, те је

$$a = q_1 k - p_1 p = \left(\frac{k}{p} - \frac{p_1}{q_1}\right) p q_1 \leq |J| p q_1 = \frac{p}{q_2} \leq 5 \cdot 6^3 \sqrt{p}, \text{ и}$$

$$b = -q_2 k + p_2 p = \left(-\frac{k}{p} + \frac{p_2}{q_2}\right) p q_2 \leq |J| p q_2 = \frac{p}{q_1} \leq 5 \cdot 6^3 \sqrt{p}.$$

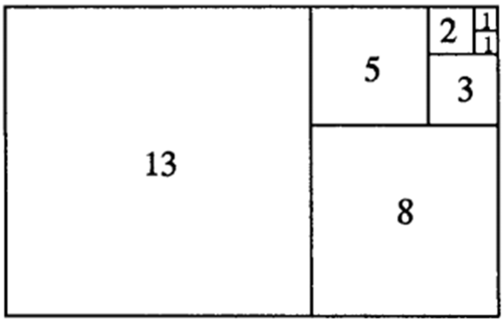
Сада ако је размера $\frac{a}{b}$ или $\frac{b}{a}$ број $x \geq 5$, враћањем уназад за један корак добијамо правоугаоник чија је размера у интервалу $[1,2)$ а ивице ограничене са $6 \cdot 6^3 \sqrt{p}$.

Да бисмо израчунали број квадрата додатих у правоугаоник димензија $k_1 \times p$ пре него што дужине ивице постану приближно $c_1\sqrt{p}$, приметимо да сваки квадрат заузима бар $\frac{1}{5}$ преостале површи, пошто је размера увек мања од 5. Почетна површина је највише p^2, па је коначна област приближно $\left(c_1\sqrt{p}\right)^2$, те број додатих квадрата s испуњава неједнакост $\left(\frac{4}{5}\right)^s \leq \frac{p^2}{c_1^2 p}$, другим речима $s \leq \log_{\frac{5}{4}} p + const$.

3. Похлепни алгоритам

Најједноставнији алгоритам за решавање проблема покривања правоугаоника је похлепни алгоритам: одабере се највећи квадрат који одговара $(p \times p)$ и постави тако да додирује краћу страницу правоугаоника, а затим се ово понавља над преосталим делом, који је сад димензија $p \times (q - p)$.

Овај метод, који је непосредно повезан са Еуклидовим алгоритмом, даје добре резултате за извесне правоугаонике, на пример правоугаонике димензија $F_n \times F_{n+1}$, где је F_n Фибоначијев број. Индукцијом се показује да се такви правоугаоници прекривају се са $n \approx log_\tau F_n$ квадрата, видети пример на слици 2.



Слика 2. Прекривање Фибоначијевог правоугаоника

Међутим, за многе правоугаонике овај алгоритам је неефикасан: за правоугаоник димензија $p \times (p+1)$, први квадрат оставља правоугаоник димензија $p \times 1$, за чије прекривање је потребно p јединичних квадрата.

Нека је $[a_0; a_1, \dots, a_k]$, $a_0 \geq 0$, $(\forall i \geq 1)\, a_i \geq 1$ верижни разломак размере правоугаоника $\frac{q}{p}$, то јест

$$\frac{q}{p} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \dots + \cfrac{1}{a_k}}}.$$

Тада за прекривање правоугаоника димензија $p \times q$ похлепним алгоритмом потребно, на основу Еуклидовог алгоритма, за:

- $q = a_0 p + r_0$, $0 < r_0 < \mathrm{p}$ — a_0 квадрата димензија $p \times p$
- $p = a_1 r_0 + r_1$, $0 < r_1 < r_0$ — a_1 квадрата димензија $r_0 \times r_0$
- $r_0 = a_2 r_1 + r_2$, $0 < r_2 < r_1$ — a_2 квадрата димензија $r_1 \times r_1$

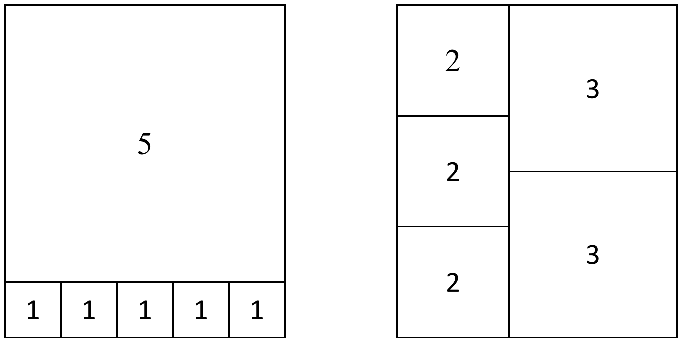
…

- $r_{k-2} = a_k r_{k-1} + r_k$, $0 < r_k < r_{k-1}$ — a_k квадрата димензија $r_{k-1} \times r_{k-1}$.

Закључујемо да је за прекривање правоугаоника димензија $p \times q$ довољно $a_0 + a_1 + \dots + a_k$ квадрата.

4. Алгоритам гиљотина

Овај алгоритам погодан је за оне правоугаонике код којих се оптимално решење добија ″гиљотинирањем″, односно низом пресецања правоугаоника на два мања, резом који је паралелан једној или другој ивици. Погледати пример на слици 3.



Слика 3. Пример правоугаоника где се оптимално решење не може добити применом похлепног алгоритма, а добија се применом алгоритма гиљотина

У првом примеру на слици 3. похлепним алгоритам добија се неоптимално решење, покривање са 6 квадата. У другом примеру на тој слици види се оптимално покривање правоугаоника димензија 5× 6 са 5 квадрата добијено алгоритмом гиљотина.

Следећа рекурзивна шема [4] динамичким програмирањем рачуна број квадрата у покривању правоугаоника када се користи алгоритам гиљотина:

$$F(p,q) = \begin{cases} F(q,p) & p > q \\ 0 & p \leq 0 \\ 1 & p = q \\ min(min\{F(k,q) + F(p-k,q); k = 1, \dots p\}, & \\ \quad min\{F(p,k) + F(p,q-k); k = 1, \dots q\}) & \text{иначе} \end{cases}$$

$$F(k,0) = F(0,k) = 0, \forall k$$

Функција $F(p,q)$ има следеће особине:

1. $F(p,q) \leq max(p,q)$
   - Ако је $p = q$ тада $F(p,q) = 1 \leq max(p,q)$

- Претпоставимо да је за $p > q$ $F(p-q,q) \leq \max(p-q,q)$ тада је
  $F(p,q) \leq 1 + F(p-q,q) \leq 1 + \max(p-q,q) \leq \max(p,q)$

  Прва неједнакост одговара одсецању квадрата димензија $q \times q$.

- Случај $p < q$ аналоган је са $p > q$.

2. $F(p+q,q) = 1 + F(p,q)$ за $3p \geq q^2$

Очигледно, $F(p+q,q) \leq 1 + F(p,q)$, јер се свако прекривање правоугаоника димензија $p \times q$ може проширити додавањем квадрата димензија $q \times q$ на прекривање правоугаоника димензија $(p+q) \times q$. Приметимо још да ако имамо оптимално прекривање правоугаоника димензија $(p+q) \times q$, које садржи квадрат димензија $q \times q$, тај квадрат можемо померити скроз улево, указујући да је $F(p,q) \leq F(p+q,q) - 1$. Стога је у том случају $F(p+q,q) = 1 + F(p,q)$.

Претпоставимо да је $F(p+q,q) \leq F(p,q)$. Из претходног следи да не постоји оптимално прекривање правоугаоника димензија $(p+q) \times q$ које садржи квадрат димензија $q \times q$. Нека је $k = \left\lceil \frac{p+q}{q} \right\rceil$. До оптималног прекривања долазимо заменом свих квадрата који прекривају првих kq редова правоугаоника са k квадрата димензија $q \times q$, и попуњавањем преосталог простора. Потребно је прорачунати колико смо квадрата уклонили а колико додали.

- Уклањамо најмање $4k$ квадрата. Број квадрата које уклањамо добијамо додајући $\frac{1}{s}$, где је s дужина странице квадрата којег уклањамо, за сваки ред који квадрат прекрива. Како сваки ред прекривају најмање два квадрата, иначе би прекривање садржало квадрат димензија $q \times q$, сваки уклоњени ред додаје најмање $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2}$ броју уклоњених квадрата, где су s_1 и s_2 димензије прва два квадрата у датом реду, $s_1 + s_2 \leq q$. Из неједначине хармонијске и аритметичке средине, $\frac{2}{\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}} \leq \frac{s_1+s_2}{2}$, имамо да је $\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} \geq 4/q$. Множењем са укупним бројем уклоњених редова, kq, следи тврђење.
- Очигледно прекривање првих kq редова захтева k квадрата.
- Преостали део може се прекрити са највише q квадрата. Приметимо да се прореди добијају као резултат преклапања квадрата са kq-тим редом, где сваки квадрат додаје прореду правоугаоник (могуће ширине 0) чија је ширина мања од

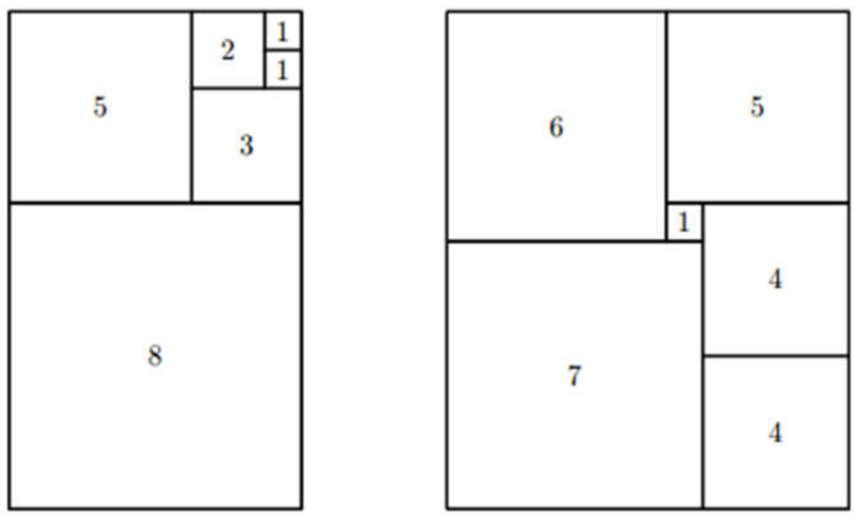
висине. Стога из $F(p,q) \leq \max(p,q)$ налазимо да је број квадрата потребних да прекрију прореде ограничен укупном висином квадрата, тј са q.

Сада, ако је $3p \geq q^2$ тада је $4k > k + 3p/q \geq k + q$, те наше ново покривање садржи мање квадрата од претходног, што је у контрадикцији са претпоставком да је претходно било оптимално. Стога је $F(p+q,q) = 1 + F(p,q)$.

3. $F(p+q,q) = 1 + F(p,q)$ за $1 \leq q \leq 4$

Како је број q мали, ове једнакости се лако доказују разматрањем различитих могућности прекривања квадратима траке ширине q.

Ипак, постоје ситуације у којима се до оптималног решења не долази овим алгоритмом, погледати слику 4.



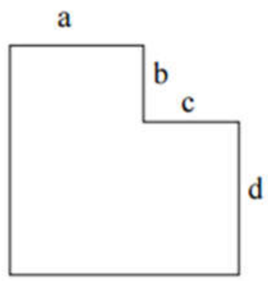
Слика 4. Пример правоугаоника где се оптимално решење може и пример правоугаоника где се оптимално решење не може добити применом алгоритма гиљотина

У првом примеру на слици 4. овај алгоритам даје оптимално решење. У другом примеру на тој слици види се покривање правоугаоноика димензија 11×13 са 6 квадрата, док алгоритам гиљотина пронази покривање са 8 квадрата (један квадрат димензија 11×11, пет квадрата димензија 2×2 и два квадрата димензија 1×1).

5. Алгоритам рекурзивног покривања фигура L

Када прекривамо правоугаоник квадратима, у горњем десном углу правоугаоника налази нам се квадрат. Преостали део правоугаоника називамо фигура L. Сада нам се задатак одређивања минималног броја квадрата који покривају правоугаоник своди на одређивање минималног броја квадрата који покривају фигуру L.

Под фигуром $L(a, b, c, d)$ подразумевамо праволинијски полигон (полигон чије су ивице паралелне са ивицама правоугаоника) који има 6 страница. Показаћемо метод прекривања квадратима фигуре $L(a, b, c, d)$ целобројних ивица дужина a, b, c, d приказане на слици 5, такав да је преостали непрекривени део фигура $L(a', b', c', d')$ са целобројним ивицама a', b', c', d' у размери ограниченој са 8 (количници ивица припадају интервалу $[1/8, 8]$).



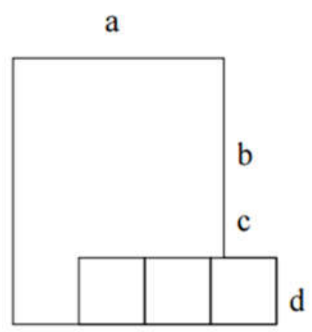
Слика 5.

Посматрајмо фигуру $L(a, b, c, d)$ за дате целе бројеве a, b, c, d видети слику 5. Ако је неки од бројева $\frac{b}{a}$ или $\frac{c}{d}$ већи или једнак од 2, рецимо $\frac{b}{a} \geq 2$, додајемо квадрат странице a тако да належе на ивицу дужине a, при чему добијамо нову фигуру L код које је однос $\frac{b}{a}$ смањен за 1; при томе се не повећава највећи од односа бројева a, b, c, d. Стога надаље сматрамо да су и $\frac{b}{a}$ и $\frac{c}{d} < 2$. Због симетричности можемо сматрати и да је или a или b најдужа ивица. Разматрамо следеће случајеве:

Случај 1. Најдужа ивица је a.

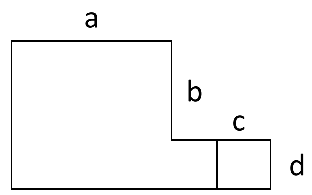
Случај 1a. Све ивице a, b, c, d су у интервалу $[d, a]$.

- Ако је $d < \frac{a}{3}$ додајемо 3 квадрата странице d као што је приказано на слици 5. Ивице нове фигуре $L(b, 3d - c, d, a + c - 3d)$ и даље су у интервалу $[d, a]$, јер је $3d - c = d + (2d - c) \geq d$, $3d - c \leq 3d < a$, $a > a + (c - 3d) = c + (a - 3d) > c$.



Слика 6.

- Ако је d $\geq \frac{a}{3}$ додајемо квадрат странице d као што је приказано на слици 7.

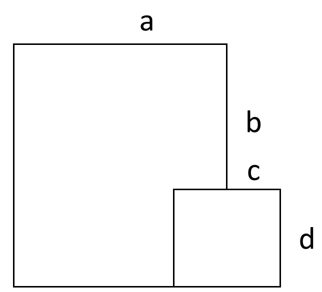


Слика 7.

Ивице нове фигуре $L(a, b, c - d, d)$ остају у интервалу $[d, a]$.

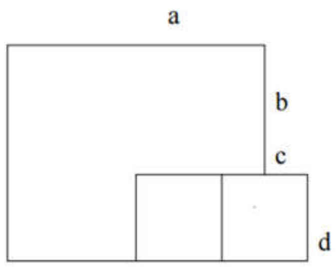
Случај 1б. Све ивице a, b, c, d **су у интервалу** $[c, a]$.

- Нека је c $< \frac{a}{3}$.
  - Ако је $d \geq 2c$, додајемо квадрат странице d тако да належе на ивицу d, као што је приказано на слици 8. Ивице нове фигуре $L(b, d - c, d, a + c - d)$ остају у интервалу $[c, a]$.



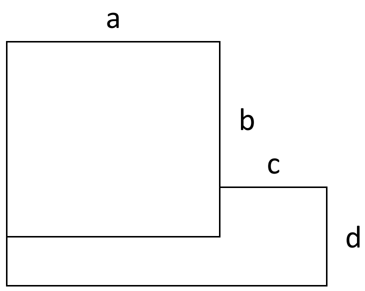
Слика 8.

  - Ако је $d < 2c$ и $a > 2d$ додајемо 2 квадрата странице d, као што је приказано на слици 9. Из услова важи да је $a > 2d > 2d - c > d$, те су све ивице нове фигуре $L(b, 2d - c, d, a + c - 2d)$ у интервалу $[c, a]$.



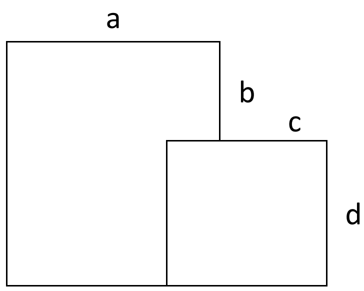
Слика 9.

- Ако је $d < 2c$ и $a \leq 2d$, тада је $a \leq 2d \leq 4c.$ Разликујемо два случаја.
  - Ако је $d = c$ додајемо квадрат странице a као што је приказано на слици 10. За $a \neq b$ све ивице нове фигуре $L(\mathrm{c}, a-b, a, b+d-a)$ су у интервалу $[c, a]$. У случају да је $a = b$ новодобијена фигура је правоугаоник димензија $(a+c) \times (b+d-a)$.



Слика 10.

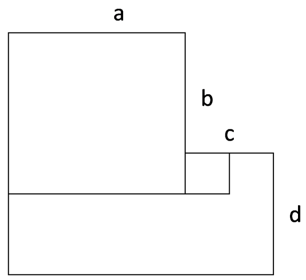
  - У супротном, за $d \neq c$, додајемо квадрат странице d тако да належе на ивицу $d,$ као што је приказано на слици 11. Ивице нове фигуре $L(b, d-c, d, a+c-d)$ остају у интервалу $[c, a]$.



Слика 11.

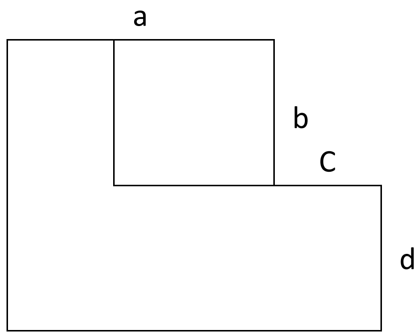
❖ Нека је $\mathrm{c} \geq \frac{\mathrm{a}}{3}$.

- Ако је $a - b < c$ додајемо квадрат странице a и квадрат странице $a-b$, као што је приказано на слици 12. Када је $a \neq b$ нова фигура $L(c+b-a, a-b, 2a-b, b+d-a)$ има све ивице у интервалу $[c, a]$. За $a = b$ добијамо нови правоугаоник димензија $(a+c) \times d$.



Слика 12.

- Ако је $a - b \geq c$ додајемо квадрат странице b као што је приказано на слици 13. Када је $a \neq b$ нова фигура $L(\, a-b, b, b+c, d)$ има све ивице у интервалу $[c, a]$. За $a = b$ добијамо нови правоугаоник димензија $(a + c) \times d$.

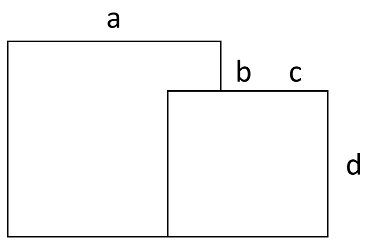


Слика 13.

Случај 1*в*. Све ивице су у $[b, a]$

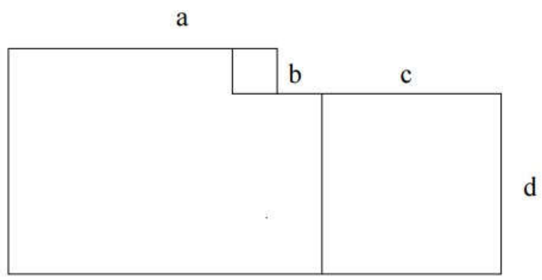
❖ Нека је b $< \frac{a}{3}$

- Ако је $d - c \geq b$ додајемо квадрат странице d тако да належе на ивицу d, као на слици 14. Нова фигура $L(b, d-c, d, a+c-d)$ има све ивице у интервалу $[b, a]$. ($a + c - d = c + (a - d) \geq c \geq b$ и $a + c - d < a$).



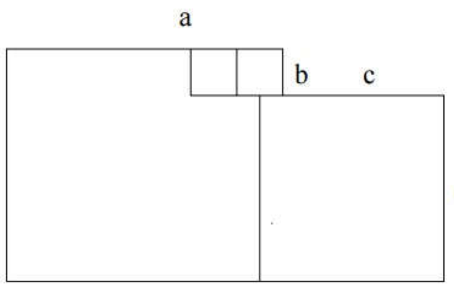
Слика 14.

- Ако је $c > d$, додајемо квадрат странице b уз ивицу b и квадрат странице d уз ивицу d, као на слици 15. Нова фигура $L(a-b, b, c+b-d, d)$ има све ивице у интервалу $[b, a]$. ($c \geq c + b - d = b + (c - d) \geq b$)



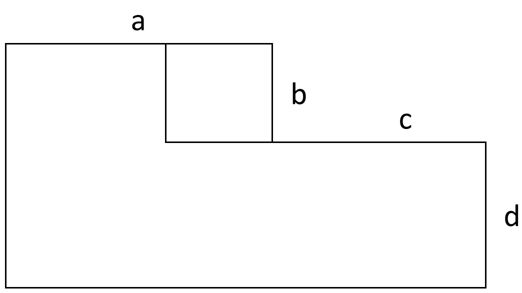
Слика 15.

- Ако је $c \leq d$, додајемо два квадрата странице b и квадрат странице d, као на слици 16. Ивице нове фигуре $L(a-2b, b, c+2b-d, d)$ остају у интервалу $[b, a]$. $(c+2b-d \leq 2b < a)$



Слика 16.

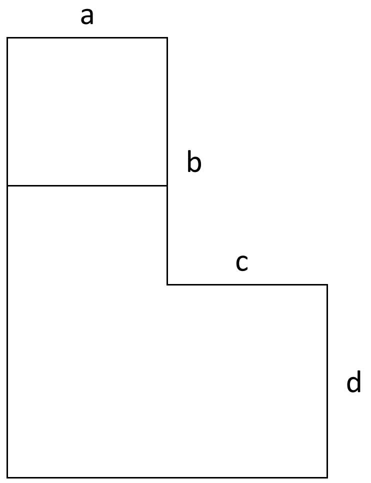
❖ Ако је $\mathrm{b} \geq \frac{\mathrm{a}}{3}$, додајемо квадрат странице b, као на слици 17. и добијамо нову фигуру $\mathrm{L}(\mathrm{a}-\mathrm{b}, \mathrm{b}, \mathrm{b}+\mathrm{c}, \mathrm{d})$.



Слика 17.

Случај 2. Најдужа ивица је b.

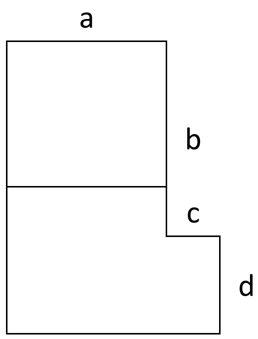
Случај 2*a*. Све ивице су у интервалу $[a, b]$. $\left(\frac{b}{a} < 2\right)$ Додајемо квадрат странице a као на слици 18. и добијамо нову фигуру $L(a, b-a, c, d)$.



Слика 18.

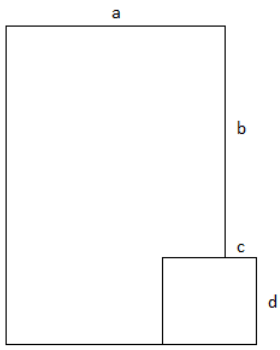
Случај 2*б*. Све ивице су у интервалу $[c, b]$.

- Ако је $a \leq 2d$ тада је $b < 2a \leq 4d < 8c$ те је $[c, b] \subset [c, 8c]$. Додајемо квадрат странице a, као на слици 19. и добијамо нову фигуру $L(a, b - a, c, d)$.



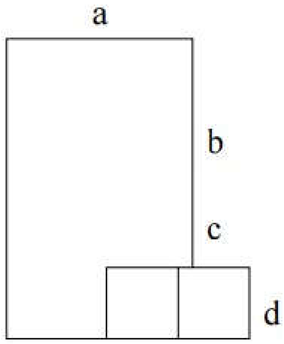
Слика 19.

- Ако је $a > 2d$ и $d > 2c$ додајемо квадрат странице d тако да належе на ивицу d, слика 20. и добијамо нову фигуру $L(b, d - c, d, a + c - d)$.



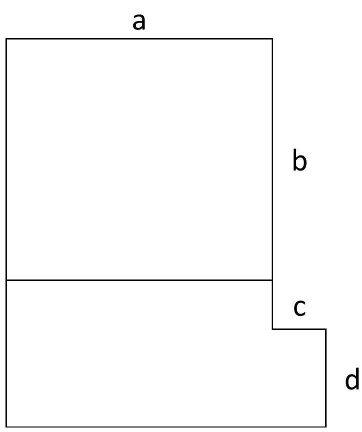
Слика 20.

- Ако је $a > 2d$ и $d < 2c$ додајемо два квадрата странице d као на слици 21. Добијамо фигуру $L(b, 2d - c, d, a + c - 2d)$. Како је $2d - c = 2(d - c) + c < 3c < b$, и $a + c - 2d = a + (c - d) - d < a < b$ све ивице ове фигуре су у $[c, b]$.



Слика 21.

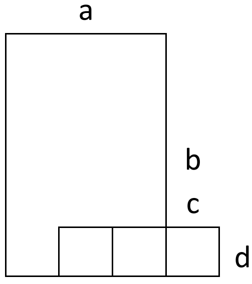
- Ако је $a > 2d$ и $d = 2c$ додајемо квадрат странице a као на слици 22. Добијамо фигуру $L(a, b - a, c, d)$.



Слика 22.

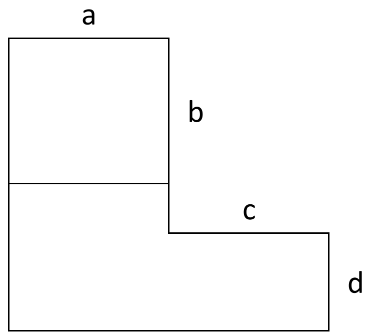
Случај 2*в*. Све ивице су у интервалу $[d, b]$.

- Ако је $a + c \geq 4d$ додајемо 3 квадрата странице d као на слици 23. Ивице нове фигуре $L(b, 3d - c, d, a + c - 3d)$ остају у интервалу $[d, b]$.



Слика 23.

- Ако је $a + c \leq 4d$ тада је $3b/2 \leq a + b < a + c < 4d$, па $[d, b] \subset \left[d, \frac{8d}{3}\right]$. Додајемо квадрат странице a као на слици 24. и добијамо нову фигуру $L(a, b - a, c, d)$.



Слика 24.

За све случајеве је заједничко да се од једне фигуре L, додавањем једног или више квадрата, прелази на нову фигуру L или правоугаоник мањих димензија од почетног, све док не дођемо до иницијалних фигура код којих знамо оптимално прекривање:

- Фигура $L(a, a, a, a)$ прекрива се са три квадрата странице a.
- Прекривање фигуре $L(a, 0, c, d)$ је прекривање правоугаоника димензија $(a + c)xd$.
- Прекривање фигуре $L(a, b, 0, d)$ је прекривање правоугаоника димензија $ax(b + d)$.
- Прекривање фигуре $L(a, a, c, d)$ састоји се од квадтара странице a и квадрата који прекривају правоугаоник димензија $(a + c)xd$
- Прекривање фигуре $L(a, b, c, d)$, где је $b + d = a$ и $(\exists n \in N)\ d = c \cdot n$, састоји се од квадрата странице a и n квадрата странице c.
- Прекривање фигуре $L(a, b, c, d)$, где је $a + c = d$ и $(\exists n \in N)\ a = b \cdot n$, састоји се од квадрата странице d и n квадрата странице b.

6. Имплементације алгоритама и резултати

6.1. Имплементација похлепног алгоритма

Похлепни алгоритам реализован је функцијом $int\ euklid\ (\ int\ a, int\ b, int\ s[]\ )$, где су a и b димензије правоугаоника, а низ $int\ s[]$ садржи дужине страница квадрата који прекривају дати правоугаоник. Алгоритам се реализује у следећим корацима:

1. Иницијализује се бројач квадрата
2. Све док се димензије правоугаоника разликују ради се следеће:
    - у низ квадрата убацује се квадрат чија је ивица једнака мањој димензији правоугаоника
    - од дуже странице правоугаоника одузима се краћа страница и тако добија нов правоугаоник.
    - повећава се за 1 бројач квадрата
    - на новодобијени правоугаоник применимо корак 2
3. На крају, када нам се димензије правоугаоника не разликују, добили смо квадрат, те бројач квадрата увећавамо за 1.

6.2. Имплементација алгоритма гиљотина

Алгоритам гиљотина реализован је рекурентном функцијом $int\ giljotina(int\ m, int\ n)$, где су m и n димензије правоугаоника. У циљу убрзања добијања целобројне вредности функције $giljotina$ уведена је матрица G. У њу се смештају израчунате вредности функције $giljotina$ и при рекурентном позиву ове функције њена вредност се прво тражи у матрици G, па тек ако је та вредност 0, тада се израчунава вредност функције $giljotina$ за дате параметре. Добијене вредности функције $giljotina$ чувају се у фајлу tablica.txt.

Алгоритам се реализује у следећим корацима:

1. Функција се иницијализује $giljotina\ (0, k) = giljotina\ (k, 0) = 0$ за свако k
2. $giljotina\ (m, n) = 1$ за $m = n$
3. $giljotina\ (1, n) = n$ за свако n
4. $giljotina\ (m, n) = giljotina\ (n, m)$ ако је $m > n$

5. А затим се рекурзијом рачуна по формули

$$giljotina\,(m,n) = min\begin{pmatrix} min\{giljotina\,(k,n), giljotina\,(m-k,n)\}; k = 1, \dots m\,, \\ min\{giljotina\,(m,k), giljotina\,(m,n-k)\}; k = 1, \dots n \end{pmatrix}$$

6.3. Имплементација алгоритма рекурзивног покривања фигура L

У овом програму долази до вишеструког рекурзивног позивања функција $int\ prav(int\ a, int\ b\ )$ и $int\ el\ (int\ a, int\ b, int\ c, int\ d)$. Прва, функција $prav(\text{a}, b)$, рачуна број квадрата који прекривају правоугаоник димензија а $\times\ b$, а друга, функција $el\ (\text{a}, b, c, d)$, рачуна број квадрата који прекривају фигуру L датих димензија. Да би се убрзао рад програма уводе се матрица A и четвородимензиони низ E. Матрица A на главној дијагонали и испод ње садржи у програму израчунате вредности функције $prav(\text{a}, b)$, а вредности матрице A изнад главне дијагонале показују колико пута су у програму читане вредности матрице A симетричне тим вредностима у односу на главну дијагоналу. ($A[i, j]$ показује колико пута је из матрице учитана вредност $A[j, i]$, $i < j$). Вредности матрице A чувају се у фајлу матрица1.txt. Низ $E(\text{a}, b, c, d)$ садржи програмом добијене вредности функције $el(\text{a}, b, c, d)$. При рекурентном позиву ових функција, њихове вредност се прво тражи у матрици A (за функцију $prav(\text{a}, b)$), или у низу E (за функцију $el(\text{a}, b, c, d)$), па тек ако је та вредност 0, тада се израчунава вредност функције за дате параметре.

ТАБЕЛА ДОБИЈЕНИХ РЕЗУЛТАТА

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
1	1
	1
	1
2	2	1
	2	1
	2	1
3	3	3	1
	3	3	1
	3	3	1
4	4	2	4	1
	4	2	4	1
	4	2	4	1
5	5	4	4	5	1
	5	4	4	5	1
	5	4	4	5	1
6	6	3	2	3	6	1
	6	3	2	3	5	1
	6	3	2	3	5	1
7	7	5	5	5	5	7	1
	7	5	5	5	5	5	1
	7	5	5	5	5	5	1
8	8	4	5	2	5	4	8	1
	8	4	5	2	5	4	7	1
	8	4	5	2	5	4	7	1
9	9	6	3	6	6	3	6	9	1
	9	6	3	6	6	3	6	7	1
	9	6	3	6	6	3	6	7	1
10	10	5	6	4	2	4	6	5	10	1
	10	5	6	4	2	4	6	5	6	1
	10	5	6	4	2	4	6	5	6	1
11	11	7	6	6	7	7	6	6	7	11	1
	11	7	6	6	6	6	6	6	7	6	1
	11	7	6	6	6	6	6	6	7	6	1
12	12	6	4	3	6	2	6	3	4	6	12	1
	12	6	4	3	6	2	6	3	4	5	7	1
	12	6	4	3	6	2	6	3	4	5	7	1
13	13	8	7	7	6	8	8	6	7	7	8	13	1
	13	8	7	7	6	6	6	6	7	7	8	7	1
	13	8	7	7	6	6	6	6	7	7	6	7	1
14	14	7	7	5	7	5	2	5	7	5	7	7	14	1
	14	7	7	5	7	5	2	5	7	5	7	5	7	1
	14	7	7	5	7	5	2	5	7	5	7	5	7	1
15	15	9	5	7	3	4	9	9	4	3	7	5	9	15	1
	15	9	5	7	3	4	8	8	4	3	7	5	8	7	1
	15	9	5	7	3	4	8	8	4	3	7	5	8	7	1
16	16	8	8	4	8	5	7	2	7	5	8	4	8	8	16	1
	16	8	8	4	7	5	7	2	7	5	7	4	8	7	7	1
	16	8	8	4	7	5	7	2	7	5	7	4	8	7	7	1
17	17	10	8	8	7	8	7	10	10	7	8	7	8	8	10	17	1
	17	10	8	8	7	7	7	8	8	7	7	7	8	7	8	9	1
	17	10	8	8	7	7	7	8	8	7	7	7	8	7	8	8	1
18	18	9	6	6	7	3	7	6	2	6	7	3	7	6	6	9	18	1
	18	9	6	6	7	3	7	6	2	6	7	3	7	6	5	7	8	1
	18	9	6	6	7	3	7	6	2	6	7	3	7	6	5	7	8	1
19	19	11	9	8	8	9	7	7	11	11	7	7	9	8	8	9	11	19	1
	19	11	9	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	9	11	8	1
	19	11	9	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	9	7	1
20	20	10	9	5	4	6	9	4	8	2	8	4	9	6	4	5	9	10	20	1
	20	10	9	5	4	6	7	4	8	2	8	4	7	6	4	5	8	6	9	1
	20	10	9	5	4	6	7	4	8	2	8	4	7	6	4	5	7	6	9	1
21	21	12	7	9	9	5	3	7	5	12	12	5	7	3	5	9	9	7	12	21	1
	21	12	7	9	8	5	3	7	5	7	7	5	7	3	5	8	9	5	8	8	1
	21	12	7	9	8	5	3	7	5	7	7	5	7	3	5	8	9	5	7	8	1
22	22	11	10	7	8	6	10	6	8	7	2	7	8	6	10	6	8	7	10	11	22	1
	22	11	10	7	8	6	9	6	8	6	2	6	8	6	8	6	8	7	8	6	8	1
	22	11	10	7	8	6	9	6	8	6	2	6	8	6	8	6	8	7	8	6	8	1
23	23	13	10	9	8	9	8	10	8	8	13	13	8	8	10	8	9	8	9	10	13	23	1
	23	13	10	9	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	1
	23	13	10	9	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	1
24	24	12	8	6	9	4	8	3	5	6	9	2	9	6	5	3	8	4	9	6	8	12	24	1
	24	12	8	6	9	4	8	3	5	6	9	2	9	6	5	3	8	4	9	5	7	7	8	1
	24	12	8	6	9	4	8	3	5	6	7	2	7	6	5	3	8	4	9	5	7	7	8	1
25	25	14	11	10	5	10	8	11	8	4	8	14	14	8	4	8	11	8	10	5	10	11	14	25	1
	25	14	11	10	5	8	8	9	8	4	8	8	8	8	4	8	9	8	8	5	8	8	12	8	1
	25	14	11	10	5	8	8	9	8	4	8	8	8	8	4	8	9	8	8	5	8	8	8	8	1
26	26	13	11	8	9	7	8	7	11	6	8	8	2	6	8	6	9	7	8	7	8	6	8	7	8	1
	26	13	11	8	10	7	8	7	9	6	8	6	2	6	8	6	9	7	8	7	8	6	8	7	8	1
	26	13	11	8	9	7	8	7	9	6	8	6	2	6	8	6	9	7	8	7	8	6	8	7	8	1
27	27	15	9	10	9	6	10	8	3	8	9	6	15	15	6	9	8	3	8	10	6	9	10	9	15	27	1
	27	15	9	10	9	6	8	8	3	8	8	6	8	8	6	8	8	3	8	8	6	8	10	7	11	8	1
	27	15	9	10	9	6	8	8	3	8	8	6	8	8	6	8	8	3	8	8	6	8	8	7	10	8	1
28	28	14	12	7	9	7	4	5	12	7	9	5	10	2	10	5	9	7	12	5	4	7	9	7	12	14	28	1
	28	14	12	7	9	7	4	5	8	7	8	5	9	2	8	5	8	7	8	5	4	7	9	5	10	7	9	1
	28	14	12	7	9	7	4	5	8	7	8	5	9	2	8	5	8	7	8	5	4	7	9	5	10	7	8	1
29	29	16	12	11	10	10	11	8	9	12	8	8	9	16	16	9	8	8	12	9	8	11	10	10	11	12	16	29\	1
	29	16	12	11	10	9	10	8	9	8	8	8	9	8	8	9	8	8	8	9	8	9	9	10	11	8	11	9	1
	29	16	12	11	10	9	10	8	9	8	8	8	9	8	8	9	8	8	8	9	8	9	9	10	10	8	8	9	1
30	30	15	10	9	6	5	9	7	6	3	8	4	9	9	2	9	9	4	8	3	6	7	9	5	6	9	10	15	30	1
	30	15	10	9	6	5	9	7	6	3	8	4	9	8	2	8	9	4	8	3	6	7	9	5	5	8	6	7	9	1
	30	15	10	9	6	5	9	7	6	3	8	4	9	8	2	8	9	4	8	3	6	7	9	5	5	8	6	7	9	1
31	31	17	13	11	11	11	9	11	9	13	9	8	8	9	17	17	9	8	8	9	13	9	11	9	11	11	11	13	17	31	1
	31	17	13	11	10	9	9	10	9	8	9	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	10	8	9	9	11	9	16	9	1
	31	17	13	11	10	9	9	10	9	8	9	8	8	8	8	8	8	8	8	9	8	8	8	8	8	8	10	8	8	8	1
32	32	16	13	8	10	8	9	4	9	8	13	5	10	7	11	2	11	7	10	5	13	8	9	4	9	8	10	8	13	16	32	1
	32	16	13	8	10	8	9	4	9	7	8	5	8	7	9	2	9	7	8	5	8	7	9	4	9	8	10	7	10	7	11	1
	32	16	13	8	10	8	9	4	9	7	8	5	8	7	9	2	9	7	8	5	8	7	9	4	9	8	8	7	8	7	9	1
33	33	18	11	12	10	7	9	12	6	9	3	6	10	9	7	18	18	7	9	10	6	3	9	6	12	9	7	10	12	11	18	33	1
	33	18	11	12	10	7	9	10	6	9	3	6	8	8	6	10	10	6	8	8	6	3	9	6	10	9	7	9	9	6	9	9	1
	33	18	11	12	10	7	9	10	6	9	3	6	8	8	6	9	9	6	8	8	6	3	9	6	10	8	7	8	9	6	9	9	1
34	34	17	14	10	11	8	11	8	9	7	14	8	8	7	9	10	2	10	9	7	8	8	14	7	9	8	11	8	11	10	14	17	34	1
	34	17	14	10	11	8	9	8	9	7	9	7	8	7	8	8	2	8	8	7	8	7	9	7	9	8	9	7	9	8	9	9	9	1
	34	17	14	10	11	8	9	8	9	7	9	7	8	7	8	8	2	8	8	7	8	7	9	7	8	8	9	7	9	8	9	8	9	1
35	35	19	14	12	7	11	5	9	12	5	10	14	9	4	5	10	19	19	10	5	4	9	14	10	5	12	9	5	11	7	12	14	19	35	1
	35	19	14	12	7	10	5	9	10	5	10	9	9	4	5	10	9	9	10	5	4	9	9	9	5	10	9	5	9	5	9	10	9	9	1
	35	19	14	12	7	10	5	9	10	5	8	9	9	4	5	8	9	9	8	5	4	9	9	8	5	8	9	5	9	5	8	10	9	8	1

- резултати добијени похлепним алгоритмом
- резултати добијени алгоритмом гиљотина -
- резултати добијени алгоритмом рекурзивног покривања фигура *L*

7. Закључак

У овом раду представили смо дводимензиони проблем у коме се захтева да се дати правоугаоник целобројних ивица растави на минимални број непреклапајућих квадрата. Као решење овог проблема разматрана су три алгоритма. Похлепним агоритмом најбрже се долази до резултата, али за значајан број правоугаоника не даје минимално решење. Прецизнији је алгоритам гиљотина, али и он не даје минимално решење за сваки правоугаоник. Трећи алгоритам, алгоритам који покрива правоугаоник помоћу фигура L, је бољи од претходна два, али се до решења за троцифрене димензије долази након вишечасовног рада програма. Добијени резултати програма упоређени саса резултатима са сајта [7]. У даљем раду потребно је побољшати алгоритме да би се постигла и већа прецизност и бржи рад програма за дужине стравица веће од 200.

Библиографија

1. R. Kenyon; Tiling a Rectangle with the Fewest Squares; Journal of combinatorial theory, Series A 26, 272-291 (1996) Article no, 0104
2. M. Dehn; Zerlegung von Rechtecke in Rechtecken, Math. Annalen, 57 (1903) 314-332.
3. M. Hall; On the sum and product of continued fractions. Annals of Math, 48 (1947):966-993.
4. http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2014/pdf/arq0373.pdf.
5. http://int-e.eu/~bf3/squares/
6. http://int-e.eu/~bf3/squares/proofs.html
7. http://math.arizona.edu/~ime/ATI/Math%20Projects/C1_MathFinal_Papenfus.pdf
8. http://mathworld.wolfram.com/PerfectRectangle.html